

LA PHYSIQUE REVISITÉE

Résolution de l'incohérence des lois initiales de l'électromagnétisme, implications et perspectives

Jean-Marc Augustin ROUX[1]
[1]Non affilié (Professeur Agrégé retraité)

La physique revisitée, Numéro 1, pages 3-12
Publié le 03 09 2025
DOI : 10.5281/zenodo.23842019
Licence: CC BY 4.0 †

ABSTRACT: The inconsistency in the initial laws of electromagnetism inspired Maxwell, but it was not resolved because it was circumvented by the use of constants when creating the SI.The objective of this theoretical study is to resolve the inconsistency and fill this gap in electromagnetism.

Cartesian analysis was used. After a historical summary that recalls how the inconsistency was circumvented without being resolved, we observe that the failure to consider the speed of light in the initial laws is the cause of its presence in the "measurements" deduced from the expressions of these laws. This "encystment" is the origin of the inconsistency between the CGS EMU and CGS ESU measurement systems. The incompatibility of these systems is then mathematically eliminated by identifying this inappropriate presence and removing it.

It follows that the speed of light affects the intensity of the phenomena. The speed of light acts as a multiplier parameter for the electrostatic force and as a dividing parameter for the magnetostatic force. It is shown that the permeability and permittivity of vacuum are compound constants: $\mu_0 = K_{MKS-A}/c$ and $1/\varepsilon_0 = K_{MKS-A}.c$ and that the value of the vacuum impedance $Z_0 = K_{MKS-A}$ depends only on the construction of the unit system.

The physical interpretation of these results and their implications are particularly interesting perspectives.

keywords: permeability, permittivity, speed of light, CGS system

RÉSUMÉ : L'incohérence des lois initiales de l'électromagnétisme a inspiré Maxwell, mais elle n'a jamais été résolue puisqu'elle a été contournée par l'utilisation de constantes lors de la création du SI. L'objectif de cette étude théorique est de résoudre l'incohérence pour combler cette lacune de l'électromagnétisme.

Une analyse cartésienne a été utilisée. Après un résumé historique qui rappelle comment l'incohérence a été contournée sans être résolue, il est montré que la non prise en compte de la vitesse de la lumière, dans les lois initiales, est la cause de sa présence dans les "mesures" déduites des expressions de ces lois. Cet "enkystement" est à l'origine de l'incohérence entre les anciens systèmes de mesure CGS UEM et CGS UES. On élimine alors mathématiquement l'incompatibilité de ces systèmes en identifiant cette présence inappropriée et en la supprimant.

Il résulte que la vitesse de la lumière agit dans l'intensité des phénomènes : La vitesse de la lumière intervient comme paramètre multiplicateur dans la force électrostatique et comme paramètre diviseur dans la force magnétostatique. Il est démontré que la perméabilité et la permittivité du vide sont des constantes composées : $\mu_0 = K_{MKS-A}/c$ et $1/\varepsilon_0 = K_{MKS-A}.c$ et que la valeur de l'impédance du vide $Z_0 = K_{MKS-A}$ dépend uniquement de la construction du système d'unités.

Ces résultats n'ont jamais été établis, leur interprétation physique et leurs implications, sont des perspectives particulièrement intéressantes.

Mots clés : perméabilité, permittivité, vitesse de la lumière, système CGS

1. INTRODUCTION

1.1. Traitement historique de l'incohérence

L'incohérence entre les expressions initiales de la force magnétostatique d'Ampère et la force électrostatique de Coulomb, a conduit les physiciens du XIX^{e} siècle et du début du XX^{e} à élaborer plusieurs systèmes d'unités électriques (UES, UEM, unités de Gauss etc.). Le système international fut établi et contourna le problème par l'utilisation de constantes [1],[2]. Cette incohérence concernait la vitesse de la lumière. Giovani Giorgi, initiateur du SI utilisa deux constantes pour adapter les lois initiales aux unités MKSA. Cette harmonisation a permis de contourner le problème. Enfin, la rationalisation proposée par Oliver Heaviside a introduit un facteur 4π et conduit aux expressions SI actuelles où les deux constantes de Giorgi ont été remplacées par les deux nouvelles constantes rationnalisées : La perméabilité magnétique du vide μ_0 et la permittivité électrique du vide ε_0. La complexité du problème explique pourquoi cette incohérence a été contournée plutôt que résolue. Avant d'étudier ce sujet en détail, on examine les conséquences actuelles de cette incohérence non résolue et contournée.

1.2. Conséquences actuelles de l'incohérence non résolue

La perméabilité magnétique du vide μ_0 et la permittivité électrique du vide ε_0 sont les constantes SI liées à la vitesse de la lumière par la relation suivante :

$$\mu_0.\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \tag{1}$$

Nous ne sommes toujours pas capables de donner le détail de la répartition de la vitesse de la lumière dans chacune des deux constantes car l'incohérence initiale n'a jamais été résolue. Nous sommes habitués à cette incertitude, cependant, la méconnaissance de cette répartition ne doit pas être admise comme une fatalité. En effet, cette méconnaissance vient d'un problème encore à résoudre, on peut donc déjà envisager rigoureusement les possibilités de solutions. L'équation (1) implique d'une façon exhaustive les possibilités suivantes :

$$\mu_0 = K.\, c^{n-2} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{K}.\, c^{-n} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$n \in \mathbb{Z}$ car la célérité est une constante physique avec des unités. Plus vraisemblablement on peut avoir $n \in [0; 2]$

La permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide sont les constantes SI des forces électrostatique et électromagnétique :

$$F_C = \frac{1}{\varepsilon_0}.\frac{Q.Q\prime}{4\pi r^2} \qquad \frac{F_A}{L} = \mu_0.\frac{I.\, I\prime}{2\pi r}$$

La vitesse de la lumière est donc obligatoirement impliquée dans au moins l'une de ces forces, mais elle n'est pas exprimée explicitement.

1.3. Réactivation d'un ancien problème

La conséquence logique de cette incohérence non résolue a motivé cette étude. En effet, on constate que le rôle physique de la vitesse de la lumière dans ces forces n'est toujours pas compris puisqu'il n'est même pas identifié alors qu'il est invisiblement pris en compte à travers la permittivité et la perméabilité du vide. Cette question était connue des physiciens jusqu'au milieu du XX^{e} siècle, puisque les systèmes de mesures électriques issues de ces deux forces étaient incompatibles : les mesures électriques étaient effectuées avec des unités mécaniques CGS (centimètre, gramme et seconde) mais il existait un rapport en vitesse lumière entre les unités des deux systèmes. En 1945, "Le journal de Physique et le Radium" publia une tentative de résoudre le problème en utilisant l'analyse dimensionnelle [3], mais basée sur une assertion non justifiée et erronée, elle n'eut pas de suite. Ce problème n'a pas été résolu dans le passé, il a engendré plusieurs systèmes d'unités électriques puis il a été finalement contourné au XX^{e} siècle après le lent processus de gestation du SI qui s'est étalé de 1901 à 1948.

Cette étude réactive ce vieux problème, très complexe, non résolu, contourné puis oublié.

1.4. Démarche scientifique

Toutes les données nécessaires à l'analyse existent depuis l'avènement du SI. Le nombre réduit et surtout l'ancienneté des références bibliographiques, sont dus au sujet lui-même puisqu'il s'agit de la réactivation d'un ancien problème. Le problème est traité de façon théorique, sa résolution demande une analyse approfondie pour obtenir une vision claire. La complexité de la solution nécessite une décomposition en plusieurs parties de difficultés moindres (méthode cartésienne) que l'on énumère ici :

1. Un résumé historique qui commence par l'observation initiale de l'incohérence et rappelle les décisions qui ont conduit aux expressions SI avec l'utilisation de la permittivité et de la perméabilité du vide. Ce résumé montre que l'incohérence n'a pas été résolue mais contournée.

2. Mise en évidence d'une lacune qui concerne la vitesse de la lumière dans les expressions initiales des forces d'Ampère et Coulomb. Cette lacune entraine la présence de la célérité dans les "mesures" déduites des expressions de ces lois ("enkystement"). Puis la reprise de la chronologie historique avec utilisation d'une inconnue dans chacune des forces pour compenser cette lacune, donnant ainsi la forme des expressions attendues à chaque étape.

3. L'analyse des deux anciens systèmes de mesures UES et UEM. Ceci permet d'identifier "l'enkystement" non justifié, de la vitesse de la lumière dans les expressions mécaniques de l'ohm dans ces deux systèmes.

4. La déduction des deux inconnues par suppression de "l'enkystement" et par conséquences, la déduction des expressions complètes des forces et des deux constantes électromagnétiques.

5. Une évaluation de la validité des conclusions et une réflexion sur les implications et les perspectives.

2. RÉSUMÉ HISTORIQUE SIMPLIFIÉ

La connaissance de ce résumé historique [1] [2] est indispensable à l'analyse ultérieure qui utilisera, point par point, les étapes de cette chronologie.

2.1. L'incohérence entre les lois de Coulomb et Ampère

En 1856, Wilhelm Weber et Rudolph Kohlrausch, communiquaient sur une observation. Le rapport entre la mesure d'une charge électrique à partir de la force électrostatique de Coulomb (système UES) et sa mesure à partir de la force électromagnétique d'Ampère (système UEM) était égal à la vitesse de la lumière :

Force électrostatique (formulation de l'époque) :

$$F_C = \frac{Q.Q\prime}{r^2} \quad \text{Sans le facteur } K_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \text{ du système SI} \tag{2}$$

Les charges Q et Q sont séparées d'une distance r.

Force électromagnétique (formulation de l'époque) :

$$\frac{F_A}{L} = 2.\frac{I.\,I\prime}{r} \quad \text{Sans le facteur } K_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{ du système SI} \tag{3}$$

F_A/L est la force par unité de longueur s'exerçant sur les conducteurs rectilignes, parallèles et infinis séparés d'une distance r. I et I' sont les courants circulant dans les deux conducteurs.

Nos unités électriques n'existaient pas encore, les charges ou les courants étaient exprimés avec les unités millimètres, milligrammes et secondes à partir des mesures mécaniques (mesures qualifiées d'absolues par opposition aux mesures relatives [4]). Cependant les mesures étaient incohérentes entre le système électrostatique (UES) et le système électromagnétique (UEM). En effet avec la force de Coulomb, la charge électrique avait la dimension suivante :

$$[Q_{UES}] = \left[\sqrt{F_C}.r\right] = M^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{3}{2}}.T^{-1}$$

Avec la force électromagnétique d'Ampère, le courant avait la dimension suivante :

$$[I_{UEM}] = \left[\sqrt{\frac{F_A.r}{2.L}}.\right] = M^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{1}{2}}.T^{-1}$$

Soit pour la charge :

$$[Q_{UEM}] = M^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{1}{2}}$$

Le rapport des dimensions des charges est une vitesse, les systèmes de mesure n'étaient pas cohérents. Mais de façon très intéressante, pour une même charge, Weber et Kohlrausch obtenaient un rapport qui était égal à la vitesse de la lumière (mesurée sept ans plus tôt) :

$$\frac{Q_{ESU}}{Q_{EMU}} = c \tag{4}$$

Ce rapport et la découverte de l'effet magnéto-optique par Faraday onze ans plus tôt permirent à Maxwell de comprendre le lien entre l'électromagnétisme et la lumière. Il synthétisa l'électromagnétisme et démontra la propagation des ondes électromagnétiques, cependant, l'incohérence entre les expressions initiales des forces ne fut pas résolue.

2.2. Les systèmes de mesures CGS-UEM et CGS-UES

Sans l'incohérence initiale, il n'y aurait eu qu'un seul système de mesures. À partir de 1862, la BAAS (British Association for the Advancement of Science) reprend l'utilisation de ces deux systèmes de mesures pour les grandeurs électriques mais cette fois en unités CGS (centimètre, gramme et seconde) :

1. Le système CGS-UEM qui était principalement utilisé. Il était basé sur la force électromagnétique (UEM = Unités électromagnétiques).
2. Le système CGS-UES était peu utilisé. Il était basé sur la force électrostatique (UES = Unités électrostatiques).

Aucun sens physique ne pouvait s'interpréter dans les combinaisons d'unités mécaniques des grandeurs électriques, elles contenaient des racines de masse et de longueur et avec leur rapport en vitesse lumière, les deux systèmes étaient toujours incompatibles.

2.3. Le système d'unités pratiques basé sur le CGS-UEM

Un système d'unités pratiques (volt, ohm etc), proches des besoins des ingénieurs fut progressivement mis en place à partir de 1874 par la BAAS [5]. Les unités de ce système pratique correspondent à des multiples décimaux des unités du système CGS-UEM parce que c'était le système le plus utilisé. On donne ci-après les deux unités initialement définies et la première qui en découle :

- 1 V $\rightarrow$ 10^8 g$^{\frac{1}{2}}$ cm$^{\frac{3}{2}}$ s^{-2}, ce qui était proche de la tension de la pile Daniell ($\sim 1,1$ V) utilisée comme référence dans la télégraphie et l'industrie.
- 1 Ω $\rightarrow$ 10^9 cm s^{-1}, ce qui était proche de l'étalon de résistance de l'industriel Werner Siemens ($\sim 0,9536\ \Omega$).
- 1 A $\rightarrow 10^{-1}$ g$^{\frac{1}{2}}$ cm$^{\frac{1}{2}}$ s^{-1}, conséquence des choix précédents.

La force électromagnétique, à la base du système CGS-UEM, s'est donc imposée dans la définition des unités électriques mais le problème à l'origine de l'incohérence avec le système UES n'a pas été résolu.

2.4. Le MKSA de Giorgi

En 1901, Giovanni Giorgi proposa d'utiliser les unités MKS (mètre, kilogramme, seconde) comme unités fondamentales de la mécanique, il proposa également d'utiliser une unité fondamentale de l'électricité. L'objectif étant de conserver les unités pratiques définies dans le système UEM, l'unité fondamentale de l'électricité devait donc rester basée sur la force électromagnétique. L'ampère fut choisi parce que la première grandeur électrique qui découle de cette force est l'intensité. Sa définition initiale par la BAAS ($1\ \mathrm{A}^2 \rightarrow 10^{-2}$ g cm $\mathrm{s}^{-2} = 10^{-7}$ kg m s^{-2}) donnait la valeur de référence de la force électromagnétique ($2\ 10^{-7}$ kg m s^{-2} pour $L = r = 1$ m). Il fallait adapter l'expression de cette force à cette unité par l'utilisation d'une constante K_A.

$$\frac{F_A}{L} = 2.K_A.\frac{I.\,I\prime}{r}$$

La constante K_A devait avoir la valeur qui pour un ampère dans les deux conducteurs et ces longueurs, correspondait à cette force, ce qui donnait : $K_A = 10^{-7}$ kg m s^{-2} A^{-2}.

Il fallait également adapter la force de Coulomb par l'utilisation d'une constante K_C:

$$F_C = K_C.\frac{Q.Q\prime}{r^2}$$

Le coulomb était lui aussi défini dans le système UEM (par la force d'Ampère). Giorgi avait donc proposé l'utilisation du rapport (en vitesse lumière) pour adapter l'expression de la force de Coulomb à cette unité. Ainsi les constantes K_C et K_A devaient respecter le rapport en vitesse lumière (4) des charges UES et UEM (au carré, compte tenu du produit des charges ou des courants) :

$$\frac{K_C}{K_A} = \left(\frac{Q_{ESU}}{Q_{EMU}}\right)^2 = c^2 \qquad \Rightarrow \qquad K_C = K_A.c^2$$

Le problème, non résolu, de l'incohérence initiale fut contourné par l'utilisation de ces constantes.

2.5. La rationalisation

Avant que le nouveau système soit adopté, Oliver Heaviside proposa d'utiliser deux nouvelles constantes, μ_0 et ε_0, ainsi qu'un facteur 4π à la place de K_A et K_C.

$$\mu_0 = 4\pi\ K_A \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\varepsilon_0} = 4\pi\ K_C$$

Cette "rationalisation" permettait une simplification de l'écriture des équations de Maxwell où ce facteur 4π qui était inutilement présent (Heaviside le nommait "l'excroissance" [6]), disparaissait [7] [8].

Voir en annexe A : Les concepts de perméabilité et permittivité, du vide.

En contrepartie de sa disparition dans les équations de Maxwell, le facteur 4π apparaissait dans certaines formules électriques (lois de Coulomb, lois de Biot et Savart ...) où il prenait de façon justifiée, le sens physique d'angle solide de tout l'espace [9]. Cela donne les expressions actuelles SI, des forces d'Ampère et Coulomb :

$$\frac{F_A}{L} = 2.\frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{I.\,I\prime}{r} \qquad K_A = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q.Q\prime}{r^2} \qquad K_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Cette rationalisation ne changeait rien au système d'unités MKSA de Giorgi mais conduisait à de nouvelles expressions. Compte tenu du lien entre les facteurs K_C et K_A remplacés, on obtient en conformité avec l'équation d'onde de d'Alembert et les équations de Maxwell rationalisées par Heaviside :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0}{4\pi}.c^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mu_0.\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

Le problème de l'incohérence initiale est depuis occulté à la fois par l'adaptation aux unités MKSA qui l'a contourné et par la rationalisation. Ce problème devenu invisible n'a donc jamais été résolu.

3. MISE EN ÉVIDENCE D'UNE LACUNE. COMPENSATION DE CETTE LACUNE PAR L'UTILISATION D'INCONNUES

A la fin du XVIII^{e} siècle et au début du XIX^{e} siècle, les expressions des forces de Coulomb et d'Ampère furent établies à partir de grandeurs observables (forces, longueurs, charges et intensité). La vitesse de la lumière, mesurée en 1849 par Hippolyte Fizeau, ne pouvait donc pas faire partie de cette catégorie à cette époque et ne fut jamais intégrée par la suite comme telle.

3.1. Mise en évidence d'une lacune

3.1.1. Une incohérence où la vitesse de la lumière apparaît

Les systèmes de mesures UEM et UES sont basés sur les expressions initiales des forces électrostatique et électromagnétique :

$$F_C = \frac{Q.Q\prime}{r^2} \qquad \frac{F_A}{L} = \frac{I.\,I\prime}{r}$$

Contrairement aux expressions SI où elle est invisiblement prise en compte à travers la perméabilité et la permittivité du vide, la vitesse de la lumière ne l'était pas dans les formes initiales qui servirent à établir les deux systèmes CGS. La vitesse de la lumière apparaissait dans le rapport des mesures, créant une incohérence dont il faut comprendre les mécanismes.

3.1.2. Conséquence de la non prise en compte de la vitesse de la lumière

On regarde les conséquences de la non prise en compte d'une constante nécessaire dans une expression avec un exemple : Supposons que l'on veuille calculer la masse m d'un objet dans l'espace, situé à une distance d du centre de la terre (de masse M_T), à partir de la force gravitationnelle F. on utiliserait l'expression de cette force :

$$F = G.\frac{m.M_T}{d^2} \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{F.d^2}{G.M_T}$$

Si la constante gravitationnelle G n'est pas prise en compte dans l'expression de la force gravitationnelle, le résultat de m sera G fois trop grand, valeur et unités incluses. La constante gravitationnelle sera ainsi "enkystée" dans le résultat de m qui n'aura ni la bonne valeur ni la bonne dimension.

Pour la même raison, la vitesse de la lumière était "enkystée" dans les résultats des systèmes UEM et UES, le rapport entre les deux nous permet de conclure que cette lacune existe, cependant cette unique information est insuffisante pour préciser si le problème se pose dans les deux expressions ou une seule.

3.2. Compensation par l'utilisation d'inconnues

On cherche les formes des expressions que l'on aurait eues si la vitesse de la lumière avait été correctement intégrée dans ces lois.

Méthode : On considèrera que les deux forces sont potentiellement incomplètes en utilisant deux inconnues, CF_A pour la force d'Ampère et CF_C pour la force de Coulomb, ce qui nous permettra d'étudier cette question sans préjuger du résultat.

On reprend la chronologie historique :

3.2.1. Expressions initiales attendues

Si au XIX^{e} siècle, les expressions des forces d'Ampère et Coulomb avaient rendu compte correctement du phénomène physique qui fait intervenir la vitesse de la lumière, on aurait eu les expressions initiales suivantes :

Expressions initiales attendues

$$\frac{F_A}{L} = 2.CF_A\,.\frac{I.\,I\prime}{r} \qquad (5)$$

$$F_C = CF_C\,.\frac{Q.Q\prime}{r^2} \qquad (6)$$

Rappel : il n'est pas préjugé si la vitesse de la lumière c intervient dans CF_A, CF_C ou les deux.

À cette époque, les courants et les charges auraient encore été exprimés en unités mécaniques à partir des expressions des forces. Cependant, la vitesse de la lumière n'aurait pas été "enkystée" dans les résultats.

Conséquence: Il n'y aurait eu qu'un seul système de mesures électriques à unités mécaniques que l'on va qualifier de "système unifié".

Un système de mesures électriques à unités mécaniques n'existe que par omission. Il n'existe que si la constante d'adaptation aux unités respectives des domaines électrique et mécanique n'est pas utilisée. "*C'est en fait cette constante qui nous permet de faire la séparation dimensionnelle par rapport aux grandeurs mécaniques*" écrivait Ake Thulin en 1966 [10], (il parlait ici de μ_0 puisqu'il était question du SI rationalisé et que les unités pratiques sont définies par rapport au système UEM). Sans une telle constante les grandeurs électriques possèdent des dimensions mécaniques qui n'ont aucune signification physique. Les systèmes UES et UEM ajoutaient une deuxième omission : la vitesse de la lumière. Il y avait une constante d'adaptation pour chaque système (K_A et K_C). Effectivement, la lumière n'intervient pas de la même façon dans les deux systèmes puisqu'ils sont incohérents.
Le système unifié est celui qui relève des expressions 5 et 6 :

- C'est un système de mesures électriques à unités mécaniques parce qu'il n'a pas de constante d'adaptation aux unités.
- C'est un système unifié parce qu'il tient compte de la vitesse de la lumière c.

3.2.2. Expressions MKSA de Giorgi attendues

Giorgi aurait adapté les expressions des deux forces aux unités MKSA, sans avoir besoin d'utiliser le rapport c^2. Il aurait donc fait intervenir une unique constante de dimensionnement K_{AC}, commune aux deux forces, au lieu d'utiliser K_A et K_C :

$$K_{Coulomb} = K_{Ampere}\,(K_{AC}) \text{ au lieu de } K_C = K_A.c^2$$

Les expressions MKSA de Giorgi auraient eu les formes suivantes :

$$\frac{F_A}{L} = K_{AC}\,.\,2.CF_A\,.\frac{I.\,I\prime}{r} \qquad (7)$$

$$F_C = K_{AC}\,.CF_C\,.\frac{Q.Q\prime}{r^2} \qquad (8)$$

3.2.3. Expressions MKSA rationalisées attendues

La rationalisation du système avec le facteur 4π aurait donné une unique constante :

$$K_{MKS-A} = 4\pi\ K_{AC}$$

$$\text{au lieu de} \qquad \mu_0 = 4\pi\ K_A \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon_0} = 4\pi\ K_C$$

On aurait obtenu le même système rationalisé SI mais avec des formulations différentes pour les deux forces :

$$\frac{F_A}{L} = K_{MKS-A} \,.\, CF_A \,.\, \frac{I.\,I\prime}{2\pi.r} \tag{9}$$

$$F_C = K_{MKS-A} \,.\, CF_C \,.\, \frac{Q.Q\prime}{4\pi.r^2} \tag{10}$$

La constante K_{MKS-A} est la constante de rationalisation et d'adaptation aux unités MKSA des expressions complètes (rationalisées et tenant compte de la vitesse de la lumière).

3.2.4. Conséquences : relations attendues

Puisqu'il s'agit du même système d'unités, rationalisé, les formulations sont équivalentes à celles du SI. La constante K_{MKS-A} est actuellement invisible, car elle est intégrée dans la perméabilité et la permittivité du vide :

$$\mu_0 = K_{MKS-A} \,.\, CF_A \tag{11}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} = K_{MKS-A} \,.\, CF_C \tag{12}$$

Il se déduit les relations suivantes :

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = K_{MKS-A} \,.\, \sqrt{CF_A.CF_C} \tag{13}$$

$$\frac{1}{\mu_0.\varepsilon_0} = \frac{CF_C}{CF_A} = c^2 \tag{14}$$

On ne peut pas déterminer directement ces trois constantes mais on peut analyser les deux anciens systèmes UEM et UES pour déterminer si la vitesse de lumière est "enkystée" dans un seul ou dans les deux. Une fois que "l'enkystement" de la vitesse de lumière sera apparent, on pourra déduire les constantes CF_A et CF_C qui doivent faire converger ces systèmes vers le système unifié (3.2.1).

4. ANALYSE DES DEUX ANCIENS SYSTÈMES DE MESURES

Notation : Les acronymes UEM et UES sous-entendant dans la littérature scientifique les unités CGS, on utilise pour éviter les ambiguïtés, les abréviations MAG et STAT pour désigner les systèmes de mesure électromagnétique et électrostatique, avec les unités mécaniques MKS.

4.1. Tableau dimensionnel des systèmes MAG et STAT (UEM et UES)

Grandeurs	STAT	MAG
I	$M^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{3}{2}}.T^{-2}$	$M^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{1}{2}}.T^{-1}$
U	$M^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{1}{2}}.T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{3}{2}}.T^{-2}$
P	$M.L^2.T^{-3}$	$M.L^2.T^{-3}$
R	$L^{-1}.T$	$L.T^{-1}$
Q	$M^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{3}{2}}.T^{-1}$	$M^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{1}{2}}$

Tableau 1 : dimensions des systèmes STAT et MAG [1]

Constats : La puissance est la seule à être cohérente, d'autre part on a :

- $[I_{STAT}] = [U_{MAG}]$
- $[U_{STAT}] = [I_{MAG}]$
- $[R_{STAT}] = 1/[R_{MAG}]$

On remarque qu'une vitesse apparait de façon contradictoire entre les deux systèmes :

$$\text{Systeme électromagnétique :} \quad [I_{MAG}] = \left[\frac{U_{MAG}}{\text{vitesse}}\right]$$

$$\text{Systeme électrostatique :} \quad [I_{STAT}] = [\text{vitesse} \,.\, U_{STAT}]$$

Cette inversion de la vitesse est représentative du sujet qui nous intéresse. La dimension de la résistance concerne directement la problématique puisqu'elle est celle d'une vitesse en MAG et de l'inverse d'une vitesse en STAT. Il faut désormais disposer des valeurs des unités électriques pratiques dans les deux systèmes, on va établir celles qui nous serons utiles en MKS.

4.2. L'ampère et l'ohm dans le système MAG

Les définitions initiales de l'ohm et de l'ampère en unités UEM CGS, permettent de les établir en unités MAG MKS (en passant par le carré pour l'ampère).

Unités SI	CGS UEM (def)	Valeurs MAG MKS
1 A	$10^{-1}\ g^{\frac{1}{2}}\ cm^{\frac{1}{2}}\ s^{-1}$	$\sqrt{10}\ 10^{-4}\ kg^{\frac{1}{2}}\ m^{\frac{1}{2}}\ s^{-1}$
1 Ω	10^9 cm s^{-1}	10^7 m s^{-1}

Tableau 2 : Valeurs de l'ampère et de l'ohm dans le système MAG

4.3. Le coulomb et l'ohm dans le système STAT MKS

Les unités pratiques ne sont pas issues d'une définition dans le système électrostatique mais on peut les établir. On calcule la force de Coulomb pour l'unité coulomb et une distance d'un mètre puis on applique la force obtenue à l'expression initiale.

$$F_C = \frac{1}{\varepsilon_0}.\frac{Q.Q\prime}{4\pi.r^2}$$

$$Q = Q\prime = 1\ \text{C}, \quad r = 1\ \text{m},$$

$$\varepsilon_0 = 8,854187\ 10^{-12}\ \text{N m}^2\text{C}^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad F_C \sim 8,987\ 10^9\ \text{N} = 8,987\ 10^9\ \text{kg m s}^{-2}$$

Dans le système STAT (expression initiale) :

$$F_C = \frac{Q.Q\prime}{r^2} \quad \Rightarrow \quad 1\text{C}_{\text{STAT}} \sim 9,48\ 10^4\ \text{kg}^{\frac{1}{2}}\ \text{m}^{\frac{3}{2}}\ \text{s}^{-1}$$

On déduit les valeurs de l'ampère (1 C.s^{-1}), du volt (1 W.A^{-1} avec 1 W = 1 kg.m^2.s^{-3}), et de l'ohm (1 V.A^{-1}), ce qui donne pour l'ohm et le coulomb :

Unités SI	Valeurs STAT MKS
1 C	$9,48\ 10^4\ \text{kg}^{\frac{1}{2}}\ \text{m}^{\frac{3}{2}}\ \text{s}^{-1}$
1 Ω	$0,111\ 10^{-9}\ \text{m}^{-1}\ \text{s} \sim \frac{1}{9}.10^{-9}\ \text{m}^{-1}\ \text{s}$

Tableau 3 : Valeurs de l'ohm et du coulomb dans le système STAT

4.4. Constat sur les valeurs STAT et MAG de l'ohm

Unités SI	Valeurs STAT MKS	Valeurs MAG MKS
1 Ω	$\frac{1}{9}.10^{-9}\ \text{m}^{-1}\ \text{s}$	$10^7\ \text{m s}^{-1}$

Tableau 4 : Valeurs de l'ohm dans les systèmes STAT et MAG.

Ce tableau et l'approximation $c \sim 3.10^8$ m s^{-1} permettent d'écrire :

L'Ohm dans les systèmes STAT et MAG

$$1\ \Omega_{\text{STAT}} \sim \frac{1}{30\ c} \qquad \text{et} \qquad 1\ \Omega_{\text{MAG}} \sim \frac{c}{30}$$

Les expressions STAT MKS et MAG MKS de l'ohm nous apportent deux informations :

1. On constate dans le cadre de l'incohérence factuelle, la présence d'un facteur approximé $1/30$ dans les deux cas. Ce facteur est la conséquence du choix de l'ohm par la BAAS en 1874 à 10^9 unités CGS UEM soit 10^9 cm.s^{-1}.
2. On voit avec la vitesse de la lumière mise en évidence, qu'elle est "enkystée" dans les expressions STAT et MAG de l'ohm. Ceci permet de conclure que la vitesse de la lumière aurait dû être prise en compte dans les expressions des deux forces.

Conclusion

La vitesse de la lumière doit être prise en compte :

- Dans la constante CF_A de la force d'Ampère pour ne plus être enkystée dans les expressions des unités MAG.
- Dans la constante CF_C de la force de Coulomb pour ne plus être enkystée dans les expressions des unités STAT.

Après ces prises en compte, les unités magnétiques et électrostatiques seront identiques (système unifié).

5. PRISE EN COMPTE DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE

5.1. Détermination des constantes CF_A, CF_C et K_{MKS-A}

5.1.1. Mise en évidence de la vitesse de la lumière dans l'expression MAG de l'ampère

On dispose déjà de l'ampère dans le système MAG (tableau 2) mais il est difficile d'en détacher la vitesse de la lumière contrairement au cas de l'ohm. On va donc utiliser l'ohm dont l'enkystement de la vitesse de la lumière est désormais apparent :

$$1\ \Omega = 1\ \text{W A}^{-2} = 1\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-3}\ \text{A}^{-2}$$

$$\Rightarrow\ 1\ \text{A}^2 = \frac{1\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-3}}{1\ \Omega}$$

$$1\ \Omega_{\text{MAG}} \sim \frac{c}{30} \ \Rightarrow\ 1\ {\text{A}_{\text{MAG}}}^2 \sim \frac{30}{c}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-3} \qquad (15)$$

L'enkystement de la vitesse de la lumière apparait maintenant pour l'ampère carré.

5.1.2. Détermination de la constante CF_A

Sans la constante CF_A (système MAG) on a :

$$\frac{F_A}{L} = 2.\frac{I.\,I\prime}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{r}{2L}.F_A = I.\,I\prime \qquad (16)$$

D'après cette dernière relation (16), l'expression MAG de l'ampère (15) correspond à des conditions de force et de longueurs telles que :

$$\frac{r}{2L}.F_A = 1\ {\text{A}_{\text{MAG}}}^2 \sim \frac{30}{c}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-3} \qquad (17)$$

Avec CF_A (expression (5) du système unifié) on a :

$$\frac{F_A}{L} = 2.CF_A \,.\frac{I.\,I\prime}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{2L}.F_A \;=\; CF_A\,.I.\,I\prime$$

Ainsi, dans le système unifié, pour des courants de 1 ampère et dans les mêmes conditions de force et de longueurs que dans l'équation (17), on obtient :

$$CF_A \,.\, 1\ \mathrm{A_{uni}}^2 \sim \frac{30}{c}\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-3}}$$

La valeur 30 vient du choix historique de l'ohm. La constante CF_A doit éliminer l'enkystement de la vitesse de la lumière dans l'expression de l'ampère. On en déduit :

$$CF_A = \frac{1}{c} \qquad (18)$$

On déduit également l'expression de l'ampère dans le système unifié :

$$1\ \mathrm{A_{uni}}^2 \;\sim\; 30\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-3}} \quad \Rightarrow \quad 1\ \mathrm{A_{uni}} \;\sim\; \sqrt{30}\ \mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{m\ s}^{-\frac{3}{2}}$$

On rappelle que les dimensions d'un système de mesures électriques à unités mécaniques n'ont aucune signification physique. Si par curiosité, on s'intéresse quand même aux dimensions du système unifié, on trouve pour la tension et le courant des racines de puissance mécanique et une dimension "1" pour la résistance (un simple facteur de proportionnalité entre les deux précédents). Malgré le théorème de substitution [11], cette égalité des dimensions du courant et de la tension paraîtrait totalement contrintuitive si on attribuait une signification à ces dimensions. Ceci explique sans doute pourquoi les physiciens du XIX^e siècle n'ont pas résolu ce problème : à juste titre les dimensions du courant et de la tension ne pouvaient pas être les mêmes mais ils cherchaient une expression mécanique de l'électricité, ils ne pouvaient donc pas concevoir ces résultats. A propos de cette recherche infructueuse, Arnold Sommerfeld disait en 1935 : "*Le système absolu (des trois unités mécaniques) pouvait être considéré comme incontournable, tant qu'on pouvait espérer déduire l'électricité de la mécanique. Ce temps est révolu.*" [2]

5.1.3. Déduction de la constante CF_C

On peut refaire le même raisonnement pour déterminer CF_C, mais il est plus simple d'utiliser la relation (14), qui aboutit au même résultat :

$$\frac{CF_C}{CF_A} = c^2 \qquad \Rightarrow \qquad CF_C = c^2.CF_A$$

$$CF_C = c \qquad (19)$$

5.1.4. Identification de K_{MKS-A}

On rappelle la relation (13):

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = K_{MKS-A} \cdot \sqrt{CF_A.CF_C}$$

A partir des constantes CF_A et CF_C déterminées, on déduit :

$$K_{MKS-A} \;= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sim 376,73\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-2}}$$

La constante d'adaptation aux unités MKSA et de rationalisation, correspond à l'impédance d'onde dans le vide.

5.2. Solutions des expressions attendues

Les expressions (11) et (12) de la permittivité électrique et de la perméabilité magnétique du vide (3.2.4) donnent les résultats suivants :

$$\mu_0 = K_{MKS-A} \cdot \frac{1}{c} \qquad \frac{1}{\varepsilon_0} = K_{MKS-A} \cdot c \qquad (20)$$

Il apparaît maintenant que la perméabilité et la permittivité du vide dépendent de la vitesse de la lumière. Ces deux constantes ne sont pas des caractéristiques magnétique et électrique du vide, elles expriment la façon dont la célérité agit dans chacun de ces phénomènes et tiennent compte de la définition des unités. Les termes permittivité et perméabilité n'ont de significations que dans les milieux autres que le vide, pour les valeurs relatives ε_r et μ_r.

Les expressions des deux forces se déduisent :

$$\frac{F_A}{L} = K_{MKS-A} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{I.\,I\prime}{2\pi.r} \qquad (21)$$

$$F_C = K_{MKS-A} \cdot c \cdot \frac{Q.Q\prime}{4\pi.r^2} \qquad (22)$$

On voit que la vitesse de la lumière est un paramètre diviseur dans la force magnétique et un paramètre multiplicateur dans la force électrostatique.

5.3. Expression indépendante de K_{MKS-A}

La permittivité et la perméabilité du vide sont des combinaisons de la vitesse de la lumière et de la constante K_{MKS-A}. Par conséquent, on ne peut plus exprimer cette dernièreà partir des précédentes, il faut établir une expression indépendante. La définition initiale de l'ampère à partir d'une force électromagnétique de $2\,.10^{-7}$N avec $L = r = 1$m, nous permet d'exprimer K_{MKS-A}:

$$2\,.10^{-7}\ \mathrm{N} = K_{MKS-A} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1\ \mathrm{A}^2}{2\pi}$$

Ce qui donne le résultat suivant :

$$K_{MKS-A} = 4\pi \,.\, c \,.\, 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$$

Faute d'avoir été pris en compte dans l'expression initiale de la force électromagnétique à partir de laquelle ont été définies les unités UEM, le facteur 4π, la vitesse de la lumière c, et le coefficient $K_A = 10^{-7}$ N A^{-2} constituent la constante qui fait la rationalisation et l'adaptation aux unités SI, de l'expression complète.

$$K_{MKS-A} = 4\pi.\underline{c}.10^{-7} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-2}$$

Où $\underline{c}$ représente la valeur numérique MKS de la vitesse de la lumière dans le vide.

La constante K_{MKS-A} apparait dans cette analyse comme une constante d'adaptation des expressions des forces aux unités SI, comme Giorgi avait initialement conçu les constantes K_A et K_C. Elle s'applique aux expressions rationalisées prenant en compte la vitesse de la lumière qui fait converger les systèmes MAG et STAT vers un seul. Cet aspect n'est donc que celui de l'adaptation au SI des expressions complètes, mais sa signification physique, indépendante d'un système d'unités, est plus complexe. En effet, cette constante correspond aussi, à l'impédance d'onde dans le vide.

6. CONCLUSIONS, ÉVALUATION, PERSPECTIVES

Conclusions :

Cette analyse a permis d'identifier la façon dont la vitesse de la lumière doit être prise en compte dans les expressions des forces d'Ampère et Coulomb. Le rôle physique de la vitesse de la lumière dans l'intensité des champs n'est désormais plus occulté par la permittivité et la perméabilité du vide. Ces constantes n'expriment pas les caractéristiques électrique et magnétique du vide mais correspondent à une action de la vitesse de la lumière dans chacun de ces phénomènes. La vitesse de la lumière n'impose pas seulement le retard dans la propagation des potentiels (Liénard-Wiechert), mais elle agit aussi dans l'intensité des champs. D'après les expressions obtenues de la permittivité et de la perméabilité du vide, la vitesse de la lumière est un paramètre qui agit en multiplicateur dans le champ électrique et en diviseur dans le champ magnétique. Il s'agit d'un résultat inédit puisque la prise en compte des temps retardés ne fait pas de la vitesse de la lumière une grandeur jouant un rôle dans l'intensité des phénomènes, comme la vitesse dans une quantité de mouvement par exemple.

Evaluation des conclusions :

Concernant la permittivité et la perméabilité du vide, la conclusion précédente est qu'elles ne représentent pas des caractéristiques du vide. Il s'agit d'une conclusion qui est conforme à l'origine de ces concepts qui est rappelée en annexe ("Les concepts de perméabilité et permittivité, du vide") où on peut vérifier qu'elles ne sont que des artifices qui compensent l'incohérence initiale et adaptent les expressions aux systèmes d'unités. C'est exactement ce rôle que montrent leurs expressions respectives. (20).

Concernant la vitesse de la lumière qui agit en multiplicateur dans la force électrique et en diviseur dans la force magnétique, on peut vérifier facilement que l'intensité de ces deux forces correspond à cette influence de la vitesse de la lumière. En effet, pour des longueurs systématiquement égales à un mètre, la force d'Ampère est dérisoire pour des courants d'un ampère ($2\ 10^{-7}$ N) et la force de Coulomb est gigantesque pour des charges d'un coulomb ($\sim\ 9\ 10^9$ N).

Perspectives :

L'impédance d'onde dans le vide exprime le rapport entre les amplitudes E et H des champs d'une onde électromagnétique dans le vide, son rôle dans les lois statiques de l'électromagnétisme soulève donc une intéressante question à approfondir.

Les actions physiques que la vitesse de la lumière représente dans les deux cas sont encore à expliquer puisque ce travail strictement analytique ne donne aucune indication sur cette question. Cependant, les expressions auxquelles ces actions conduisent sont maintenant définies, ce qui donne les pistes de réflexion sur une nouvelle façon d'appréhender ces lois de base de l'électromagnétisme. Il semble désormais nécessaire de prendre en compte la propagation de l'action entre charges dans la formulation des forces d'interaction. On ne peut plus les aborder comme de simples actions à distance matérialisées par des champs. On a vu que la vitesse de la lumière agit en multiplicateur dans la force électrique et en diviseur dans la force magnétique. Le processus qui aboutit à la présence d'un champ électrique et le processus qui aboutit à la présence d'un champ magnétique, sont donc à établir en tenant compte de ce constat.

ANNEXES

A. Les concepts de perméabilité et permittivité du vide

A.1. Perméabilité magnétique

Dans un milieu de perméabilité magnétique μ, la force magnétique NON RATIONNALISÉE s'exprime ainsi :

$$\frac{F_A}{L} = \mu.2\frac{I.\,I\prime}{r} \quad \text{avec} \quad \mu = \mu_r.\mu_0$$

La perméabilité magnétique du vide μ_0 sert de référence pour les autres milieux. Elle était initialement égale à 1 dans le système CGS UEM (voir expression initiale (3) de F_A dans le vide). La perméabilité n'avait donc un sens que dans un milieu, mais dans le vide, sa valeur 1 dans le système UEM lui donnait la valeur $1/c^2$ dans le système UES à cause de l'incohérence. La perméabilité du vide a donc acquis une existence à cause de l'incohérence. L'adaptation aux unités MKSA et la rationalisation (Système SI) ont donné à la perméabilité du vide sa valeur actuelle :

$$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} \text{ kg m s}^{-2} \text{ A}^{-2}$$

A.2. Permittivité électrique

Pour l'électrostatique, Heaviside inventa le terme permittivité [8]. La permittivité correspond à ce que Faraday appelait le "pouvoir spécifique pour l'induction électrostatique" que Maxwell notait avec la lettre K [12]. Dans un milieu de permittivité diélectrique ε, la force électrostatique NON RATIONNALISÉE s'exprime :

$$F_C = \frac{1}{\varepsilon}.\frac{Q.Q\prime}{r^2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \varepsilon_r.\varepsilon_0$$

La permittivité diélectrique du vide ε_0 sert de référence pour les autres milieux. Elle était initialement égale à 1 dans le système CGS UES (Voir expression initiale (2) de F_C dans le vide). La permittivité n'avait donc un sens que dans un milieu, mais dans le vide, sa valeur 1 dans le système UES lui donnait la valeur $K = 1/c^2$ dans le système UEM à cause de l'incohérence. La permittivité du vide a donc acquis une existence à cause de l'incohérence. L'adaptation aux unités MKSA et la rationalisation (Système SI) lui a donné sa dénomination et sa valeur actuelle :

$$\varepsilon_0 = 8,854\,187\,82\ 10^{-12}\ \text{kg}^{-1}\ \text{m}^{-3}\ \text{s}^4\ \text{A}^2$$

A.3. Synthèse

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

systems	EMU	ESU	SI
μ_0	1	$1/c^2$	$4\pi\ 10^{-7}$ kg m s^{-2} A^{-2}
ε_0	$1/c^2$	1	$8,854...\ 10^{-12}$ kg^{-1} m^{-3} s^4 A^2

Tableau A-1 : Valeurs de la perméabilité et de la permittivité du vide dans les systèmes UEM, UES et SI. [9].

Contrairement à la perméabilité relative et la permittivité relative qui ont une signification physique dans les milieux, les concepts de perméabilité du vide et de permittivité du vide ne sont que des artifices qui compensent l'incohérence initiale et adaptent les expressions aux systèmes d'unités.

REFERENCES

[1] Borvon, G., *Histoire de l'electricite, de l'ambre a l'electron*. Paris: Vuibert, 2009.

[2] Blondel, C. and G. Borvon, "Les unites electriques et leur unification," Histoire de l'électricité et du magnetisme, 2008, https://ampere-archives.fr/histoire-electricite/parcours-historique/unites-electriques/unification.

[3] Villey, J., "Analyse dimensionnelle et systemes d'unites coherents," *Journal de Physique et le Radium*, Vol. 6, 1945, https://hal.science/jpa-00233896/document.

[4] Blavier, E. E., *Des grandeurs electriques et de leur mesure en unites absolues*. Paris: Dunod, 1881.

[5] Blondel, C. and G. Borvon, "Le coulomb, l'ampere, le volt, le watt, l'ohm," Histoire de l'électricité et du magnetisme, 2008, https://ampere-archives.fr/histoire-electricite/parcours-historique/unites-electriques/histoire.

[6] Heaviside, O., *Electrical papers VOL.I*. London: Macmillan and co, 1892.

[7] Fleury, P., "Coordination des unites mecaniques et electriques en un systeme pratique international : formules classiques ou rationalisees," *Journal de Physique et le Radium*, Vol. 9, 1948, https://hal.science/jpa-00234082/document.

[8] Darrigol, O., *Les equations de Maxwell de MacCullagh a Lorentz*. Paris: Belin, 2005.

[9] Bruhat, G., *Electricite, Cours de Physique Generale, 8eme edition revue par Georges GOUDET*. Paris: Masson & Cie, 1963.

[10] Thulin, A., "Oiml, 26eme bulletin de l'organisation internationale de metrologie," 1966," https://www.oiml.org/en/publications/bulletin/pdf/1966-bulletin-26.pdf.

[11] Blot, J., *Cours d'electronique lineaire*. Paris: Dunod Universite, 1993.

[12] Maxwell, J. C., *Traite d'electricite et de magnetisme. tomes I et II (traduction de la 2eme edition anglaise par G. Seligmann-Lui)*. Paris: Gauthier-Villars, 1885.